РАЗДЕЛ I
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 531.8+669.14

Алюшин Ю. А.

МЕХАНИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ В ОБЛАСТИ ОБРАТИМЫХ И НЕОБРАТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Современная теория обработки давлением не может гарантировать расчет энергосиловых параметров в любых технологических операциях с погрешностью менее 15 % в связи с особенностями используемых исходных предпосылок, в том числе механических характеристик материалов в определяющих соотношениях деформационной теории пластичности или теории пластического течения.

Диаграммы механического состояния любых материалов предусматривают реально наблюдаемые достаточно большие диапазоны возможного изменения механических характеристик материалов (предел текучести $\sigma_{тек}$, предел прочности и пр.) [1–3]. Возможность такой погрешности оправдывают и условия пластичности Губера – Мизеса или Треска – Сен – Венана, в соответствии с которыми предельное значение касательных напряжений изменяется в пределах $\sigma_{тек}/2 \le \tau_{тек} \le \sigma_{тек}/\sqrt{3}$.

Из-за отсутствия достоверных зависимостей между структурными изменениями деформируемого материала, энергетически эквивалентными в процессах теплового и механического воздействия, значительно выше погрешность предсказания свойств материала, в частности упрочнения, после деформации.

Цель работы – показать возможность повышения точности прогнозирования не только энергосиловых, но и эксплуатационных характеристик изделий, необходимых для обоснования оптимальных или предельных условий деформирования, за счет перехода от механических свойств к физическим, отражающим изменение энергетического состояния частиц деформируемого материала [1–2].

Для обоснования существования таких свойств достаточно рассмотреть кинематические инварианты уравнений движения:

$$f_i(x_i, \alpha_p, t) = 0\,, \tag{1}$$

где t – время, $x_i \in (x, y, z)$, $\alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma)$ – переменные Эйлера и Лагранжа, соответственно, которые несут всю информацию о внешних воздействиях и внутренних изменениях, происходящих в процессах деформации. Система (1) может быть записана в различных формах, однако, необходимость учета истории деформирования, а также возможность использования принципа суперпозиции движений [3–4], особенно для сложных процессов деформации, делает предпочтительной форму Лагранжа:

$$x_i = x_i(\alpha_p, t)\,. \tag{2}$$

В дальнейшем в качестве переменных Лагранжа приняты начальные (при t = 0) координаты точек в системе координат наблюдателя $\alpha = x|_{t=0}$, $\beta = y|_{t=0}$, $\gamma = z|_{t=0}$.

В самом общем случае без каких-либо ограничений на свойства сплошной среды система (2) имеет 13 локальных кинематических инвариантов. Три из них связаны с векторными характеристиками движения: модули векторов перемещения $\vec{u}(\alpha_p, t)$, скорости $\vec{v}(\alpha_p, t)$ и ускорения $\vec{w}(\alpha_p, t)$:

$$\xi_1 = |u| = \sqrt{u^2}\ ; \qquad \vec{v}(\alpha_p, t)\ ; \qquad \xi_2 = |v| = \sqrt{v^2}\ ; \qquad \xi_3 = |w| = \sqrt{w^2}\ .$$

Инвариантом также является путь s, равный интегралу от модуля скорости по времени:

$$\xi_4 = s = \int_0^t |v|\, dt \cdot$$

Несимметричный тензор второго ранга, образуемый производными от переменных Эйлера по переменным Лагранжа:

$$x_{i,p} \equiv \partial x_i / \partial \alpha_p\,, \tag{3}$$

для которого в дальнейшем использован термин «тензор деформации Лагранжа» [2, 5], имеет три инварианта:

$$\xi_5 = x_\alpha + y_\beta + z_\gamma\,; \tag{4}$$

$$\xi_6 = x_\alpha^2 + x_\beta^2 + x_\gamma^2 + y_\alpha^2 + y_\beta^2 + y_\gamma^2 + z_\alpha^2 + z_\beta^2 + z_\gamma^2\,; \tag{5}$$

$$\xi_7 = |x_{i,p}| = \delta V / \delta V_0 = R\,. \tag{6}$$

Кубический инвариант ξ_7 совпадает с якобианом преобразования (2) и равен отношению объемов бесконечно малой частицы в текущем δV и исходном δV_0 состояниях.

В отличие от симметричного тензора деформаций Коши [6] инварианты (4–6) всегда положительны, в исходном состоянии частицы принимают значения $\xi_5 = \xi_6 = 3$, $\xi_7 = R = 1$.

В соответствии с основным постулатом механики, поведение системы зависит от положения частиц и их скоростей. Тензор (3) можно рассматривать как обобщенные координаты, их скорости также образуют несимметричный тензор («обобщенные скорости»):

$$x_{i,tp} \equiv \partial x_{i,t} / \partial \alpha_p\,, \tag{7}$$

который имеет три инварианта: линейный, квадратичный и кубический:

$$\begin{gathered} \xi_8 = x_{t\alpha} + y_{t\beta} + z_{t\gamma} = (\xi_5)_t\,; \\ \xi_9 = x_{t\alpha}^2 + x_{t\beta}^2 + x_{t\gamma}^2 + y_{t\alpha}^2 + y_{t\beta}^2 + y_{t\gamma}^2 + z_{t\alpha}^2 + z_{t\beta}^2 + z_{t\gamma}^2\,; \\ \xi_{10} = |x_{i,tp}|\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Дополнительно три инварианта могут быть получены интегрированием по времени модулей инвариантов ξ_8, ξ_9, ξ_{10}. В отличие от инвариантов (4–6), которые в процессе деформации могут расти или уменьшаться, результаты интегрирования по времени:

$$\xi_{11} = \int_0^t \sqrt{(x_{t\alpha} + y_{t\beta} + z_{t\gamma})^2}\, dt\,; \quad \xi_{12} = \int_0^t \left(x_{t\alpha}^2 + x_{t\beta}^2 + x_{t\gamma}^2 + y_{t\alpha}^2 + y_{t\beta}^2 + y_{t\gamma}^2 + z_{t\alpha}^2 + z_{t\beta}^2 + z_{t\gamma}^2\right) dt\,; \quad \xi_{13} = \int_0^t |x_{i,tp}|\, dt$$

только возрастают на протяжении всего процесса деформации и позволяют учесть историю деформирования, аналогично критерию Одквиста [5–6].

Перечисленные 13 локальных инвариантов ξ_i являются независимыми, они или составленные из них выражения должны определять состояние и поведение частиц, а также механической системы в целом. Чтобы сравнивать состояния и предсказывать реакцию системы на внешние воздействия, приведенные выше 13 инвариантов надо привести к одному обобщенному скаляру, который Аристотелем [7] был назван энергией («обобщенная мера различных видов движения»):

$$\delta E = \delta E(\xi_i) .$$

Оператор δ подчеркивает локальный (по отношению к пространству) характер скаляра.

Как показывает опыт, для большого класса механических систем из абсолютно твердых и деформируемых тел обобщенный скаляр можно представить в виде суммы составляющих, каждая из которых зависит только от одного инварианта $\delta E = \sum_i \delta E_i(\xi_i)$, причем каждое слагаемое можно представить как произведение соответствующего инварианта на объем δV_0 и скалярный множитель k_i, характеризующий свойства среды и обеспечивающий равенство размерностей слагаемых:

$$\delta E = \sum_i \delta E_i(\xi_i) = \sum_i k_i \xi_i \delta V_0 . \tag{9}$$

Скалярные коэффициенты ki должны характеризовать либо физические свойства материала, например плотность материала при вычислении кинетической энергии частицы, либо свойства среды, в которой происходит движение, например ускорение свободного падения при движении в гравитационном поле Земли. Гипотеза (9) может быть расширена, например, за счет учета взаимных влияний инвариантов, т. е. добавлением слагаемых, определяемых значениями двух и более инвариантов.

Дальнейший анализ ограничим формулировкой обобщенного закона движения механической системы в виде закона сохранения энергии на бесконечно малом интервале времени:

$$d\delta E = \delta V_0 (d \sum_i k_i \xi_i) - \delta dE_e = 0 , \tag{10}$$

где δE_e – энергия внешних воздействий. Оператор «*d*» – соответствует бесконечно малым приращениям функции во времени в отличие от оператора «δ», используемого для бесконечно малых приращений функций в пространстве переменных Лагранжа.

Уравнение (10) предполагает определение бесконечно малых приращений энергии, которые могут быть вычислены на приращениях, выбранных для описания движения кинематических координат q_j, используемых в правых частях уравнений перечисленных выше инвариантов:

$$d\delta E_i(k_i \xi_i (q_j)) = \delta V_0 k_i \left(\partial \xi_i / \partial q_j\right) dq_j = \delta Q_{ij} dq_j . \tag{11}$$

Множитель Q_{ij} по существу является энергетическим определением обобщенной локальной силы:

$$\delta Q_{ij} = \left(\partial \delta E_i / \partial q_j\right) = k_i \left(\partial \xi_i / \partial q_j\right) \delta V_0 , \tag{11a}$$

характеризующей скорость изменения соответствующего вида энергии E_i бесконечно малой частицы при изменении кинематического параметра q_j. В общем случае сила Q_{ij} может быть скаляром, если в качестве кинематического параметра выбран скаляр, например путь s или квадрат скорости v^2, вектором, если параметры q_j являются проекциями вектора, или тензором 2 ранга. Размерность силы Q_{ij} также зависит от выбора кинематической координаты q_j, например, [Н] или [Нм] для линейных или угловых перемещений, [Па] для тензора напряжений Лагранжа и пр.

Закон сохранения энергии (10) предполагает учет всех как внутренних, так и внешних энергетических факторов. Для учета энергетических потоков со стороны окружающих частиц воспользуемся общепринятой методикой, использующей скалярное произведение векторов силы $\delta\vec{P}$ и скорости $\vec{v}$: $d\delta E_e = \sum(\delta\vec{P}\cdot\vec{v})dt$. Суммирование в правой части должно быть проведено по всем ограничивающим рассматриваемую бесконечно малую частицу поверхностям. С учетом возможных изменений сил и скоростей на противоположных гранях, предполагая все функции дифференцируемыми и заданными в переменных Лагранжа, получим с точностью до бесконечно малых 1-го порядка (по пространственным переменным и времени):

$$\omega = d\delta E_e /(\delta V_0 dt) = \tau_{pi} x_{i,tp} + x_{i,t}\partial\tau_{pi} / \partial\alpha_p, \tag{12}$$

где $\tau_{pi} = (\delta P_{pi} / \delta\alpha_p)\delta V_0$ – напряжения Лагранжа, образуют несимметричный тензор второго ранга. Индекс $p \in (\alpha, \beta, \gamma)$ указывает направление нормали к рассматриваемой площадке в исходном состоянии, а индекс i – направление проекции силы, может принимать значения $i \in (x, y, z)$. Напряжения τ_{pi} подобны напряжениям Пиола-Кирхгофа [5], но отличаются от них ограничением области изменения аргументов и неоднозначным выбором начала отсчета шкалы средних напряжений, которое может быть смещено относительно общепринятой [2].

С учетом внешних взаимодействий закон сохранения (10) можно записать в форме энергетического баланса:

$$d\delta E = \delta V_0 (k_1\xi_{1,t} + k_2\xi_{2,t} + k_3\xi_{3,t} + \ldots + k_{13}\xi_{13,t} - \omega)dt = 0. \tag{13}$$

Пренебрегая процессами диссипации (т. е. без учета инвариантов, связанных с интегрированием по времени), а также используя общепринятые соотношения для потенциальной и кинетической энергии (ось z направлена вертикально вверх):

$$d\delta E_1 = \rho_0 g z_t \delta V_0 dt, \quad d\delta E_2 = \rho_0 (x_t x_{tt} + y_t y_{tt} + z_t z_{tt})\delta V_0 dt,$$

получим:

$$d\delta E_1 + d\delta E_2 + d\delta E_5 + d\delta E_6 + d\delta E_7 = \omega\delta V_0 dt,$$

или, с учетом дифференциальных уравнений движения [1, 5]:

$$\tau_{pi}x_{i,tp} = k_5(x_{t\alpha} + y_{t\beta} + z_{t\gamma}) + 2k_6(x_\alpha x_{t\alpha} + x_\beta x_{t\beta} + x_\gamma x_{t\gamma} + y_\alpha y_{t\alpha} + y_\beta y_{t\beta} + y_\gamma y_{t\gamma} + z_\alpha z_{t\alpha} + z_\beta z_{t\beta} + z_\gamma z_{t\gamma}) +$$
$$+ k_7(\tilde{x}_\alpha x_{t\alpha} + \tilde{x}_\beta x_{t\beta} + \tilde{x}_\gamma x_{t\gamma} + \tilde{y}_\alpha y_{t\alpha} + \tilde{y}_\beta y_{t\beta} + \tilde{y}_\gamma y_{t\gamma} + \tilde{z}_\alpha z_{t\alpha} + \tilde{z}_\beta z_{t\beta} + \tilde{z}_\gamma z_{t\gamma}). \tag{14}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых множителях – компонентах тензора скорости деформации (7), получаем соотношения между компонентами напряжений, элементами тензора (3) и константами k_i, характеризующими физические свойства материала:

$$\tau_{pi} = k_5\delta_{pi} + 2k_6 x_{i,p} + k_7\tilde{x}_{i,p}. \tag{15}$$

В соотношении (15) и далее $\tilde{x}_{i,p}$ – алгебраические дополнения элементов $x_{i,p}$ матрицы (3); единичный тензор δ_{pi} принимает значения $\delta_{pi} = 1$ при соответствии индексов «p» и «i», т. е. $\delta_{pi}=1$ для $\tau_{\alpha x},\tau_{\beta y},\tau_{\gamma z}$ и $\delta_{pi}=0$ для всех остальных напряжений, не расположенных на главной диагонали. В исходном состоянии, когда переменные Эйлера и Лагранжа совпадают (матрица якобиана преобразуется в единичную), компоненты тензора определяют только физические свойства:

$$\tau_{\alpha x}=\tau_{\beta y}=\tau_{\gamma z}=k_5+2k_6+k_7\,;\quad \tau_{\beta x}=\tau_{\gamma x}=\tau_{\alpha y}=\tau_{\gamma y}=\tau_{\alpha я}=\tau_{\beta я}=0\,. \tag{16}$$

Энергетический баланс должен выполняться в любой, в том числе начальный, момент времени, для которого можно использовать напряжения Коши σ_{ij}:

$$d\delta E_e/\delta V dt=\sigma_{ij}x_{j,ti}\,. \tag{17}$$

Переходя в уравнении (17) от производных по переменным Эйлера $\partial x_{i,t}/\partial x_j\equiv x_{i,tj}$ к производным по переменным Лагранжа $\partial x_{i,t}/\partial\alpha_p\equiv x_{i,tp}$ с помощью общих соотношений, вытекающих из уравнений движения (2) $\partial f/\partial x_i=(\partial f/\partial\alpha_p)\widetilde{x}_{i,p}/R$, и приравнивая коэффициенты при одинаковых множителях $x_{i,tp}$ в правых частях уравнений (12) и (17), получим систему линейных уравнений:

$$\tau_{pi}=\sigma_{ji}\widetilde{x}_{j,p}\,, \tag{18а}$$

которые формально совпадают с известными статическими условиями на контуре и по существу определяют связи между напряжениями Лагранжа и Коши, справедливые для любого момента времени:

$$\sigma_{ji}=\tau_{pi}x_{j,p}/R\,. \tag{18б}$$

Равенства (18б) можно трактовать как следствие условия инвариантности энергии по отношению к выбору начала отсчета времени в системе наблюдателя. С учетом (16) для напряжений σ_{ji} окончательно получаем:

$$\sigma_{ji}=\frac{1}{R}\left(\tau_{\alpha i}x_{j,\alpha}+\tau_{\beta i}x_{j,\beta}+\tau_{\gamma i}x_{j,\gamma}\right)=\frac{1}{R}\begin{bmatrix}k_5x_{j,\alpha}+2k_6(x_{i,\alpha}x_{j,\alpha}+x_{i,\beta}x_{j,\beta}+x_{i,\gamma}x_{j,\gamma})+\\+k_7(x_{j,\alpha}\widetilde{x}_{i,\alpha}+x_{j,\beta}\widetilde{x}_{i,\beta}+x_{j,\gamma}\widetilde{x}_{i,\gamma})\end{bmatrix}. \tag{18в}$$

Сопоставление выражений (16) и (18в) показывает, что для анализа процессов деформации напряжения Лагранжа предпочтительнее: они энергетически обоснованы и связаны простыми математическими уравнениями с имеющими четкий геометрический смысл характеристиками деформированного состояния. Основной инвариантной характеристикой напряженного состояния можно считать среднее напряжение Коши σ:

$$3\sigma R=k_5\xi_5+2k_6\xi_6+3k_7\xi_7\,, \tag{19}$$

которое можно использовать для определения среднего напряжения в исходном состоянии:

$$\sigma_0\,|_{t=0}=k_5+2k_6+k_7\,. \tag{20}$$

Если коэффициенты k_5–k_7, характеризующие физические свойства деформируемого материала, известны, тогда по уравнениям движения в форме (2) можно определить любые кинематические, а затем и энергетические или силовые функции, в том числе напряжения Лагранжа (14) и Коши (18). Они могут быть использованы для корректировки (выбора) начала отсчета шкалы средних напряжений. Есть достаточно оснований считать, что в исходном состоянии средние напряжения не следует принимать равными 0. В частности, закон упругого изменения объема $\sigma=3K\varepsilon$ можно считать совпадающим с законом изотермического расширения газа $pV=const$, если модуль объемной упругости *K* рассматривать как действующее в текущем состоянии давление.

Из закона сохранения энергии в форме (10) следует, что деформация возможна при изменении не менее двух видов энергии (или работы внешних сил). Это позволяет установить связь между коэффициентами k_i и привести систему отсчета различных видов энергии к одной шкале.

В качестве примера рассмотрим зависимость между коэффициентами k_1 и k_2 на примере свободного падения абсолютно твердого тела (частицы) в гравитационном поле Земли, в котором участвуют два вида энергии: потенциальная δdE_1 и кинетическая δdE_2. Сопротивлением воздуха пренебрегаем, иначе надо добавить изменение энергии δdE_4, предполагая какую-либо связь между диссипативными силами и инвариантом s или скоростью $|v|$. Уравнения движения и закон сохранения энергии примут вид (ось z направлена вертикально вверх):

$$x = \alpha\,; \qquad y = \beta\,; \qquad z = \gamma - u_z(\gamma, t)\,; \qquad d\delta E_1 + d\delta E_2 = 0\,.$$

Повороты отсутствуют, движение поступательное, энергию можно проинтегрировать по всему объему тела. Для приращений энергии E_1 и E_2 следует записать:

$$dE_1 = k_1 dz < 0\,; \qquad dE_2 = k_2 d({v_z}^2) = k_2 d(z_t^2) = 2k_2 z_{tt} z_t dt = 2k_2 z_{tt} dz > 0\,;$$

и, если использовать общепринятое обозначение для ускорения свободного падения $z_{tt} = -g$, соотношение между коэффициентами должно быть $k_1 = 2k_2 g$. В классической механике принято $k_1 = mg$, тогда $k_2 = m/2$ и для кинетической энергии получаем общепринятое выражение:

$$E_2 = mv^2/2\,.$$

Свойства, определяемые коэффициентами k_5, k_6, k_7, должны полностью определять энергетические изменения частиц в области упругой деформации. Свойства k_8, k_9, k_{10} и инварианты ξ_8, ξ_9, ξ_{10} не вошли в уравнение энергетического баланса (14), учитывающего внешние воздействия, так как их производные по времени содержат множители типа $x_{i,ttp}$, которые не входят в выражение (12) для энергии внешних воздействий. Этого достаточно для утверждения, что они связаны с механизмами упругой и пластической деформации.

В процессе необратимой деформации условие энергетического баланса вместо (14) принимает вид:

$$\omega = \tau_{pi} x_{i,tp} = k_5\xi_5 + k_6\xi_{6,t} + k_7\xi_{7,t} + k_{11}\xi_{11,t} + k_{12}\xi_{12,t} + k_{13}\xi_{13,t}\,, \tag{21}$$

следовательно, диссипативные процессы связаны с параметрами $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}$ и свойствами k_{11}, k_{12}, k_{13}. Именно они определяют изменение механических свойств материалов, в том числе эффект Баушингера [5], энергетические особенности фазовых переходов и пр.

Так как излагаемая энергетическая модель должна учитывать возможные варианты движения от любых внешних воздействий, рассмотрим изменение энергетического состояния частицы из изотропного материала при равномерном нагреве. В соответствии с общепринятыми представлениями и понятиями, при нагреве на температуру ΔT линейные размеры частицы изменяются на величину $\alpha_T \Delta T$, где α_T – коэффициент линейного расширения материала, при этом затрачивается энергия:

$$\Delta\delta E = \int_{T_0}^{T} c\,\delta m dT\,,$$

или, приближенно, $\Delta\delta E = c_{cp}\delta m \Delta T$, $\Delta\delta E/\delta V_0 = c_{cp}\rho_0 \Delta T$, где c_{cp} – средняя теплоемкость материала в рассматриваемом диапазоне температур от T_0 до T. С учетом уравнений движения

$x_i = \alpha_i(1+\alpha_T \Delta T)$, деформаций Лагранжа $x_\alpha = (1+\alpha_T \Delta T)$ и приращений инвариантов $\Delta I_1 = 3\alpha_T \Delta T$, $\Delta I_2 = 6\alpha_T \Delta T + 3(\alpha_T \Delta T)^2$, $\Delta I_3 = 3\alpha_T \Delta T + 3(\alpha_T \Delta T)^2 + (\alpha_T \Delta T)^3$, условие перехода подведенного тепла в энергию частицы принимает вид:

$$c\rho_0 / \alpha_T = 3k_5 + 6k_6 + 3k_7 + 3\alpha_T(k_6 + k_7)\alpha_T \Delta T + k_7(\alpha_T \Delta T)^2 \approx 3(k_5 + 2k_6 + k_7). \quad (22)$$

Сравнивая правые части уравнений (20) и (22), можно утверждать, что средние напряжения в исходном состоянии следует считать равными:

$$\sigma_0\big|_{t=0} = c\rho_0 / (3\alpha^T) = k_5 + 2k_6 + k_7, \quad (23)$$

где все физические характеристики в правой части должны соответствовать исходному состоянию материала, т. е. при нормальном давлении и температуре 20 °С. По существу использование соотношения (23) соответствует переходу к новой энергетической шкале средних напряжений, по аналогии с термодинамической шкалой температуры Кельвина.

Для ряда материалов расчетные значения σ_0 приведены в табл. 1, данные взяты из работы [8] и на сайте s-metall.com.ua.

Таблица 1

Расчетные значения напряжений

Материал	$\sigma_0 = c\rho_0 / (3\alpha_T)$, ГПа	*K*, ГПа
Алюминий	27, 19–33,9	75,8
Медь	67,91–68,43	137,6
Титан	78,94–102,30	107
Никель	99,56–102,86	161
Свинец	16,42–17,36	*46*
Цинк	26,65–30,53	60
Железо	97,22–111,06	169

Для определения каждого из коэффициентов правой части уравнения (20) достаточно дополнительно двух уравнений, например, по результатам испытания на чистый сдвиг и гидростатическое сжатие. В качестве основного принимаем общее уравнение (19) для среднего напряжения:

$$3\sigma R = k_5\xi_5 + 2k_6\xi_6 + 3k_7\xi_7,$$

которое можно привести к обычной шкале средних напряжений за счет сдвига шкалы на величину исходных напряжений (20), т. е. в обычной шкале зависимость среднего напряжения Коши от инвариантов тензора деформации принимает вид:

$$\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_0 = (k_5\xi_5 + 2k_6\xi_6 + 3k_7\xi_7)/3R - (k_5 + 2k_6 + k_7) = k_5\left(\frac{\xi_5}{3R} - 1\right) + 2k_6\left(\frac{\xi_6}{3R} - 1\right) + k_7\left(\frac{\xi_7}{R} - 1\right).$$

В условиях гидростатического сжатия с уравнениями движения $x_i = \alpha_i(1+\varepsilon) = \alpha_i e$, $\xi_5 = 3e,\ \ \xi_6 = 3e^2,\ \ \xi_7 = e^3$ и $R = \xi_7 = e^3$ получаем $\tilde{\sigma} = (1-e)[k_5(1+e) + 2k_6 e]/e^2$. С другой стороны, из закона упругого изменения объема:

$$\tilde{\sigma} = 3K(R^{-1/3} - 1) = 3K(e-1)/e^2. \quad (24)$$

Приравнивая правые части последних двух уравнений, получим:

$$k_5(1+e) + 2k_6 e = -3K \quad (25)$$

или, принимая во внимание $e \cong 1$:

$$k_5 + k_6 = -1{,}5K \,. \tag{26}$$

Испытания при линейном растяжении менее достоверны, так как уравнения движения содержат коэффициент Пуассона, изменение которого на различных этапах деформации может вносить существенные погрешности в результаты расчета. Более предпочтительными являются исследования при чистом плоском сдвиге с уравнениями движения:

$$x = \alpha + \theta\beta\,; \qquad y = \alpha\theta + \beta\,; \qquad z = \gamma\,,$$

где θ – угол сдвига. Два инварианта сохраняют исходные значения, меняется только квадратичный инвариант $\xi_5 = I_1 = 3$, $\xi_6 = I_2 = 3 + 2\theta^2$, $\xi_7 = I_3 = 1$. Работа внешних сил $\Delta E_e = \int_\gamma \tau d\gamma = G\int_\gamma \gamma d\gamma = 0{,}5G\gamma^2$ должна соответствовать изменению энергии материала $\Delta E_6 = k_6 \Delta\xi_6 = 2k_6\gamma^2$. Из энергетического баланса для обратимого процесса получаем:

$$k_6 = \frac{1}{4} G \,. \tag{27}$$

Важно, чтобы величина G была определена с помощью описанного эксперимента, а не вычислена через модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Отрицательный знак коэффициента k_5 объясняет увеличение энергии частицы при уменьшении ее объема за счет гидростатического сжатия.

ВЫВОДЫ

Механические характеристики материалов определяют точность результатов исследований для обоснования практических рекомендаций по оптимизации процессов, прогнозированию разрушения, упрочнения, изменению структуры и пр. Энергетическая модель механики позволяет обосновать существование новых физических свойств материалов в области обратимых и необратимых деформаций, в том числе новую шкалу средних напряжений, по аналогии с термодинамической шкалой температур, а также необходимость исследования их влияния на формирование структуры, технологические и прочностные свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алюшин Ю. А. Энергетические основы механики : учеб. пособие для вузов / Ю. А. Алюшин. – М. : Машиностроение, 1999. – 192 с.*
2. *Алюшин Ю. А. Энергетическая модель обратимых и необратимых деформаций в пространстве переменных Лагранжа : сборник «Прогрессивные технологии пластической деформации» / Ю. А. Алюшин. – М. : НИТУ МИСиС, 2009. – С. 44–67.*
3. *Алюшин Ю. А. Принцип суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа / Ю. А. Алюшин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2001. – № 3. – С. 13–19.*
4. *Алюшин Ю. А. Механика процессов деформации в пространстве переменных Лагранжа : учеб. пособие для вузов / Ю. А. Алюшин. – М. : Машиностроение, 1997. – 136 с.*
5. *Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давление / В. Л. Колмогоров. – М. : Металлургия, 1986. – 688 с.*
6. *Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с. : ил.*
7. *Богомолов А. Н. Механика в истории человечества / А. Н. Богомолов. – М. : Наука, 1978. – 150 с. : ил.*
8. *Леби Т. Таблицы физических и химических постоянных / Дж. Кей, Т. Леби. – М. : Наука, 1976. – 608 с.*

Алюшин Ю. А. – д-р техн. наук, проф. МГГУ.

МГГУ – Московский государственный горный университет, г. Москва, Россия.

E-mail: alyushin7@gmail.com.